

מבחן לדוגמה של קורס השלמה ל 5 יחידות – החוג לפיזיקה יישומית והנדסת חשמל

1. כמה מהשברים הבאים ניתן לצמצם כך שהתוצאה תהיה פולינום?

$$\frac{4x^2 + 8x + 4}{x + 1}, \frac{x^2 + 9}{x + 3}, \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$$

$$\frac{4x^2 + 8x + 4}{x + 1} = \frac{4(x+1)^2}{x+1} = 4(x+1)$$

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = \frac{(x+2)(x+3)}{x+3} = x+2$$

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

2. $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x+1}{x^2-x-6} = ?$

א. $\frac{x^2+x-8}{(x^2-4)(x-3)}$

ב. $\frac{x^2+x-8}{(x^2-4)(x^2-x-6)}$

ג. $\frac{x+3}{(x+2)(x-2)(x-3)}$

ד. $\frac{x+3}{2x^2-x-10}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+1}{(x-3)(x+2)} \\ = \frac{2(x-3) + (x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-3)} \\ = \frac{x^2+x-8}{(x^2-4)(x-3)} \end{aligned}$$

3. נתונה המשוואה $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. סכום הפתרונות בקטע $[-\pi, \pi]$ הוא:

I: $2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$

פתרונות: $-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$

Ⓘ $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

א. 0

Ⓡ $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

ב. $\frac{\pi}{3}$

II: $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

פתרונות: $\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

ג. $\frac{5\pi}{12}$

ד. $-\frac{\pi}{3}$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x \cdot \ln x$ אז $f'(x) = ?$

א. $\sin^4 x \cdot \ln x + 4 \sin^3 x \cos x \cdot \ln x + \sin^4 x \cdot \frac{1}{x}$

א. $\cos^4 x \ln x + \frac{\sin^4 x}{x}$
 ב. $4 \sin^3 x \cos x \cdot \frac{1}{x}$
 ג. $4 \sin^3 x \ln x + \frac{\sin^4 x}{x}$
 ד. $4 \sin^3 x \cos x \ln x + \frac{\sin^4 x}{x}$ (ד)

5. $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = ?$ בחרו את התשובה שאינה נכונה:

א. $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ $\frac{4}{\sin^2 2x}$
 ב. $\frac{2}{\sin^2 x \cos^2 x}$
 ג. $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}$
 ד. $\frac{1}{\sin x \cos x} (\tan x + \cot x)$

6. נתונה המשוואה $1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(3x)$. מספר הפתרונות בקטע $[0, \pi]$

הוא:
 א. 0
 ב. 1
 ג. 2
 ד. 3

הוא: לפי הנוסחה $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$
 $x = \pm 3x + 2\pi k$
 $\swarrow$
 $-2x = 2\pi k$
 $x = \pi k$
 $4x = 2\pi k$
 $x = \frac{\pi}{2} k$
 בקטע $[0, \pi]$ יש: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$

7. אוסף הנקודות מהצורה $t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ הוא

- א. ישר העובר בראשית הצירים.
 ב. ישר שאינו עובר בראשית הצירים.
 ג. מישור העובר בראשית הצירים.
 ד. מישור שאינו עובר בראשית הצירים.

נשים אל שוקטורי הכיוון

אז $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ אינם

מקבילים, אז כן שבו מישור.

אם נבחר $t = -10$ ו $s = 0$ נקבל את השלש הצירים $(0, 0, 0)$.

8. המישור שמשוואתו $ax + by + z = 0$ מכיל את הישר שהצגתו הפרמטרית:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ואת הנקודה } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ אזי}$$

א. $b = 2$ המישור עובר דרך נקודת $(1, 1, 1)$ וציר $(1, 2, 3)$
 ב. $b = -2$ אולי $a + b + c = 0$ נקודת $a = 1$ $a + 2b + 3c = 0$
 ג. $b = 1$
 ד. $b = -1$

אפשר למצוא b גם בלי הנקודה
 $b + c = -1$
 $2b + 3c = -1$
 ב $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. המצב ההדדי בין הישרים שהצגותיהם הפרמטריות הם: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

וקטורי הכיוון הם מקבילים וכן הישרים
 (חברים או מצטלבים)
 $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ זו

הוא:
 א. מקבילים
 ב. מתלכדים
 ג. מצטלבים
 ד. נחתכים.
 (חפש נקודת שיתוף)
 $\begin{cases} 0 + 6t = 2 + s \\ 1 + 5t = s \\ 2 + 4t = 1 + s \end{cases}$
 אין פתרון...

10. נתון כי הוקטורים במרחב u, v מאונכים זה לזה וכי הם שווים אורך. אז

קוסינוס הזווית הנוצרת בין $u - v$ לבין $2u + v$ שווה:

א. 0
 ב. $\frac{1}{\sqrt{6}}$
 ג. $\frac{1}{\sqrt{10}}$
 ד. 1
 $\cos \theta = \frac{(u-v) \cdot (2u+v)}{\|u-v\| \cdot \|2u+v\|} = \frac{a^2 \|u\| = \|v\| = a}{\sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{5} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{10}}$
 השתמשו בזנבן $u \cdot v = 0$

11. אם הוקטור $u + v$ מאונך לוקטור $u - v$ אז בהכרח:

א. $\|u\| = \|v\|$

ב. u מאונך ל v

ג. u מאונך ל $u + v$

ד. $\|u + v\| = \|u - v\|$

$$(u+v) \cdot (u-v) = 0$$

$$u \cdot u + u \cdot v - u \cdot v - v \cdot v = 0$$

$$u \cdot u = v \cdot v$$

$$\|u\|^2 = \|v\|^2$$

12. אם הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ מאונך לוקטורים: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ אז

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = a + 2b + 3 = 0$ (שני וקטורים הם פרופורציונליים)
 $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 6a + 3b = 0$

א. -1
 ב. 1
 ג. -2
 ד. 2

13. סכום הפתרונות של המשוואה: $z^3 = 8i$ הוא:

$z^3 = 2^3 e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$
 $z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$
 $z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$
 $z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$

א. i
 ב. 0
 ג. $-2i$
 ד. $2\sqrt{3}$

14. אם $z = re^{i\theta}$ אזי מהי ההצגה הקטבית של $\frac{5i}{z}$?

$\frac{5i}{z} = \frac{5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}{r e^{i\theta}} = \frac{5}{r} e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}$

א. $5re^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$
 ב. $5re^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$
 ג. $\frac{5}{r} e^{i(-\theta + \frac{\pi}{2})}$
 ד. $\frac{5}{r} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$

15. נתון המספר המרוכב: $z = 1 - \sqrt{3}i$ ונתון כי $z^{100} = re^{i\theta}$ אזי

$r = 2^{100}, \theta = -\frac{\pi}{3}$
 $r = 1, \theta = -\frac{\pi}{3}$
 $r = 1, \theta = \frac{2\pi}{3}$
 $r = 2^{100}, \theta = \frac{2\pi}{3}$

א.
 ב.
 ג.
 ד.

16. יהי z מספר מרוכב שרדיוסו 1

טענה 1: $z + \frac{1}{z}$ מספר ממשי.
 טענה 2: $z - \frac{1}{z}$ מספר מדומה.
 אזי:

א. טענה 1 נכונה וטענה 2 אינה נכונה.
 ב. טענה 2 נכונה וטענה 1 אינה נכונה.
 ג. שתי הטענות אינן נכונות.
 ד. שתי הטענות נכונות.

$(|z|=1) \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$
 $z = a+bi$
 $\frac{1}{z} = a-bi$
 $z + \frac{1}{z} = 2a$
 $z - \frac{1}{z} = 2bi$

17. תהי $F(x) = \int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ וכן $F(1) = 0$ אזי $F(e) = ?$

$$F(x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

א. $\frac{1}{3}$
 ב. $\frac{1}{4}$
 ג. $\frac{1}{e}$
 ד. $\frac{1}{4e}$

כאן $F(1) = 0$ ולכן $C = 0$
 וכן $F(e) = \frac{\ln^4 e}{4} = \frac{1}{4}$

18. אם נתון כי $F'(x) = \tan x$ וכן ש: $F(\pi) = 3$ אז $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

$$F(x) = -\ln |\cos x| + C$$

א. $3 + \sqrt{3}$
 ב. $3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$
 ג. $3 + \ln \frac{1}{2}$
 ד. $3 - \ln \frac{1}{2}$

כלומר $3 = F(\pi) = -\ln |-1| + C$
 $\Downarrow$
 $C = 3$
 ולכן $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\ln \left|\cos \frac{\pi}{3}\right| + 3$

19. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ הביטוי: $\frac{(-ab)^5 \cdot \sqrt[3]{a^6 b^9}}{b^{-2}}$ שווה ל:

$$\sqrt[3]{a^6 b^9} = a^2 b^3$$

א. $-a^7 b^6$
 ב. $-a^8 b^6$
 ג. $-a^7 b^{10}$
 ד. $-a^8 b^{10}$

נשים לב כי

20. יהי $k > 0$. המשוואה $x^2 + kx + y^2 = 0$ מייצגת:

א. מעגל שמרכזו $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$ ורדיוסו $\frac{k^2}{4}$
 ב. מעגל שמרכזו $(-k, 0)$ ורדיוסו k
 ג. מעגל שמרכזו $(-k, 0)$ ורדיוסו 0
 ד. מעגל שמרכזו $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$ ורדיוסו $\frac{k}{2}$

נקודה השלמה איננה

$$x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = 0 + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$